

5. cvičení - Limity posloupností 2

10. 11. 2022

👁 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Vypočítejte následující limity.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3^{2n+1})$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!}$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n} + 2n}{n! + \sqrt{n}}$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 + 7n^3 - 5}{50n^5 - 24n^2}$

e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 7^n + n^3 \cdot 5^n}{-3n \cdot 7^n + \sqrt{n} \cdot 6^n}$

f. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right)$

g. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \cdot \sin(2n)}{n \cdot \cos(3n) + (2n + \sin(4n))^2}$

Příklad 2. Vypočítejte následující limity.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{(5,00001)^n}$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

d. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$

e. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 2^n + 3^n}$

f. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

g. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n} - n$

h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2} \cdot 2^n - \sqrt{3^n + 2^n}}$

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$

j. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^{n+3^n}}}{2^n \sqrt[n]{4^n + \sqrt{n}}}$

k. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + 2^n \sqrt[n]{2n}}$

l. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$

Příklad 3. Vypočítejte následující limity.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right)$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + n}{n^2}$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$

e. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, pro $a, b, c > 0$

f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}}$, pro $a > b > 0$

Příklad 4. Vypočítejte následující limity pomocí znalosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

b. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

Příklad 5. Vypočítejte následující limity.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$

b. 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{2} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor}$

Příklad 6. Dokažte následující:

a. pro $a > 1$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

b. pro $a \in (0, 1)$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

c. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

d. Pro $a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

e. Pro $a > 1, b > 0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

f. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

g. Pro $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

h. Pro $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$